Les nombres complexes

I) Forme algébrique

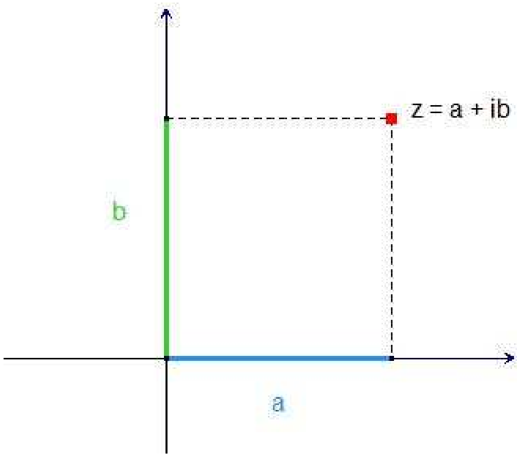
1) Ensemble des nombres complexes

Un nombre complexe est de la forme

$z = a + ib$

La partie réelle est notée :
Re(z) = a
La partie imaginaire est notée
Im(z) = b

Deux nombre complexes sont égaux si et seulement si ils possèdent la même partie **réelle** et le même partie **imaginaire**.



2) Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

$$i^2 = -1$$

- Addition

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + ib) + (a' + ib') \\ &= a + a' + i(b + b') \end{aligned}$$

- Multiplication

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' - bb' + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

II) Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe

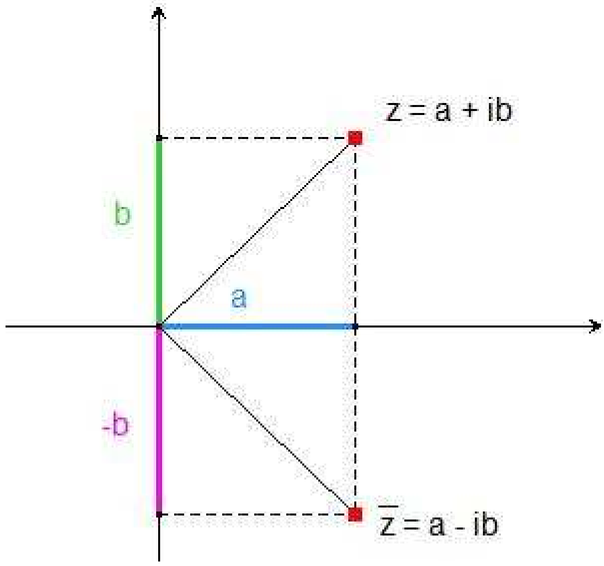
$z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$

Opérations sur les conjugués :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$



Démonstration :

$$z = a + ib \qquad \overline{z} = a - ib$$
$$z' = a' + ib' \qquad \overline{z}' = a' - ib'$$
$$\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib}$$
$$\overline{z + z'} = \overline{a + a' + i(b + b')}$$
$$\overline{z + z'} = a + a' - i(b + b')$$
$$\overline{z + z'} = a - ib + a' - ib$$
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

III) Forme trigonométrique

Module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

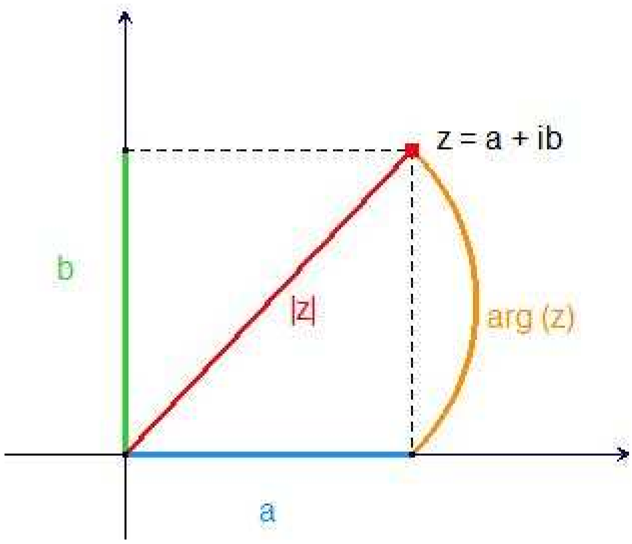
Argument de z :

$$\arg(z) = \theta$$

Avec :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$$



D’où la forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Egalité de deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

IV) <u>Propriétés des modules et des arguments</u>

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

Démonstration :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$\begin{aligned} z \times z' &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta'\sin\theta + \sin\theta'\cos\theta)\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right] \end{aligned}$$

$|z \times z'| = rr' = |z| \times |z'|$

$\arg(zz') = \theta + \theta'[2\pi] = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration par récurrence

On vérifie au rang n=1

$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = cos(1 \times \theta) + i\sin(1 \times \theta)$ Vrai

On suppose vrai au rang n c'est-à-dire

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

On démontre alors vrai au rang n+1

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \times (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \times (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + \sin((n+1)\theta) \end{aligned}$$

Module et argument d’un rapport

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

V) <u>Forme exponentielle d'un complexe</u>

Cas général : $z = |z| e^{i\theta}$

Formule de Moivre

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Formule d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration :

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

VI) **Equation du second degré à coefficients réels**

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \quad \text{car } a \neq 0$$

$$\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Forme canonique

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

L'équation devient :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

1er cas $\Delta > 0$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

2ème cas $\Delta = 0$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$z+\frac{b}{2a} = 0$$

$$z = \frac{-b}{2a}$$

$$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

3ème cas $\Delta < 0$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Or $-\Delta = i^2 \times \Delta$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2 \times (-\Delta)}{4a^2} = 0$$

$$\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$$

On a donc $\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$ ou $\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$S = \left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$$

Figures dessinées avec Cabri Géomètre II

Fiche réalisée par Pierre-Yves Magnaldi et Nicolas Moro
Terminale S – Année scolaire 2005/2006