# Application des nombres complexes à la géométrie

## I) Affixe d'un vecteur

### 1) Définition

L'affixe d'un vecteur $\vec{w}(a;b)$ est le nombre complexe $a+ib$

**Théorème :**

$aff\,(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$

### 2) Affixe du barycentre

**Théorème :**

$(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)$ avec $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$

$A_1$ d'affixe $z_1$

$A_2$ d'affixe $z_2$

……………...

$A_n$ d'affixe $z_n$

Le barycentre G a pour affixe :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}$$

**Démonstration :**

D'après la définition du barycentre :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)\overrightarrow{GO} + \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}(\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n})$$

Passons aux affixes :

$$z_G = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n)$$

# II) Utilisation de l'affixe pour la géométrie

## 1) Distances et angles

$$\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \bmod [2\pi]$$

## 2) Angles orientés

**Théorème :**

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \bmod [2\pi]$$

**Démonstration :**

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) \bmod [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) \bmod [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C) \bmod [2\pi]$$

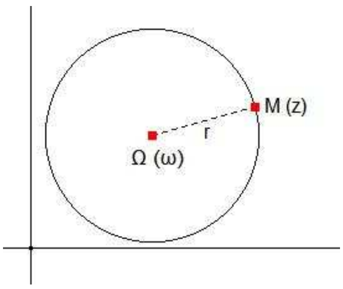
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \bmod [2\pi]$$

## 3) Ensembles de points

**- Cercles :**

$\Omega$ d'affixe $\omega$
M d'affixe z
M est sur un cercle de centre $\Omega$ et de rayon r si et seulement si

$$\Omega M = r$$
$$|z - \omega| = r$$



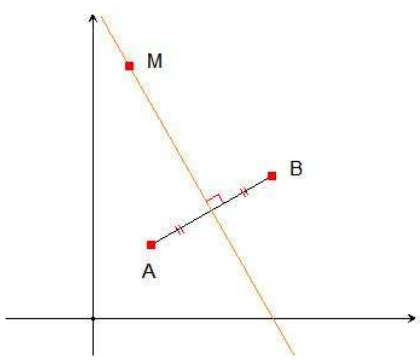

*Remarque :*
Si $\Omega M \leq r$ alors M est dans le disque de centre $\Omega$ et de rayon r (frontière comprise)

**- Médiatrices**

A et B deux points distincts du plan

M est sur la médiatrice de AB si et seulement si :

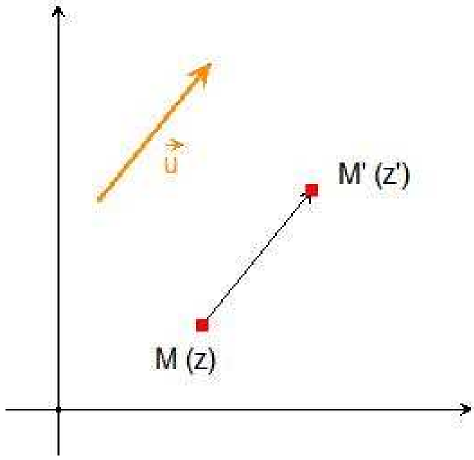
$$AM = BM$$
$$|z - z_A| = |z - z_B|$$



## III) Ecriture complexe des transformations

### 1) Translations

M d'affixe z
M' d'affixe z'




$\vec{u}$ est un vecteur non nul

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si :

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

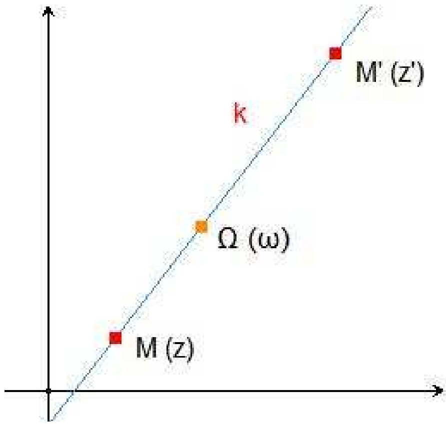
$aff(\overrightarrow{MM'}) = aff(\vec{u})$

$z' - z = z_{\vec{u}}$

$z' = z + z_{\vec{u}}$

### 2) Homothéties

$\Omega$ d'affixe $\omega$




M' est l'image de M par l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport k si et seulement si :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M}$

$aff(\overrightarrow{\Omega M'}) = k \times aff(\overrightarrow{\Omega M})$

$z' - \omega = k(z - \omega)$

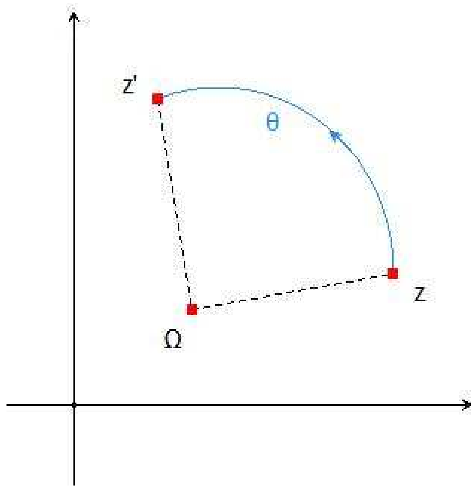
$z' = k(z - \omega) + \omega$

### 3) **Rotations**

$\Omega$ d'affixe $\omega$

M' est l'image de M par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \bmod [2\pi] \end{cases}$$




$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

$|z' - \omega| = |e^{i\theta}||(z - \omega)|$

$\Omega M' = 1 \times \Omega M$

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg(\frac{z' - \omega}{z - \omega}) \bmod [2\pi]$

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg(e^{i\theta}) \bmod [2\pi]$

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \bmod [2\pi]$

$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

Cas particulier : $\omega = 0$

$z' = e^{i\theta} z$

M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\theta$

*Figures dessinées avec Cabri Géomètre II*

*Fiche réalisée par Pierre-Yves Magnaldi et Nicolas Moro*
*Terminale S – Année scolaire 2005/2006*